Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Новосибирский государственный технический университет»
Кафедра прикладной математики

Паспорт экзамена

по дисциплине «Прямые и итерационные методы решения больших разреженных систем уравнений», 2 семестр

1. Методика оценки

Экзамен проводится в письменной форме, по билетам. Билет состоит из 5 вопросов и формируется по следующему правилу:

- первый вопрос выбирается из диапазона вопросов 1-9,
- второй вопрос – из диапазона вопросов 10-13,
- третий вопрос – из диапазона вопросов 14-27
- четвертый вопрос – из диапазона вопросов 28-37,
- пятый вопрос – три пункта вопроса 38.

Таким образом, проверяются результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с установленными в программе индикаторами достижения компетенций.

На экзамене преподаватель вправе задавать студенту уточняющие и дополнительные вопросы из общего перечня (п. 4).

Форма экзаменационного билета

НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
Факультет ФПМИ

Билет № _____
к экзамену по дисциплине «Прямые и итерационные методы решения больших разреженных систем уравнений»

---

1. Дайте определения следующим понятиям:
   - скалярное произведение и билинейная форма в комплексном линейном пространстве,
   - предобусловливание. (2 балла)

2. Вывести схему метода COCR с предобусловливанием. (6 баллов)

3. Ответить на вопросы:

1. Можно ли применить метод обобщенных минимальных невязок (GMRES) для решения СЛАУ с комплексной симметричной матрицей? (1 балл)
2. Можно ли применить метод сопряженных невязок (CR) для решения СЛАУ с вещественной несимметричной матрицей?
3. Можно ли применить метод сопряженных градиентов (CG) для решения СЛАУ с комплексной несимметричной матрицей? (1 балл)
4. Можно ли применить стабилизированный метод бисопряженных градиентов

(BiCGStab) для решения СЛАУ с вещественной неэрмитовой матрицей? (1 балл)

5. Можно ли применить метод сопряженных градиентов (CG) для решения СЛАУ с комплексной эрмитовой матрицей? (1 балл)
6. Можно ли применить метод бисопряженных градиентов (BiCG) для решения СЛАУ с комплексно-симметричной, но неэрмитовой матрицей? (1 балл)
7. Выполняется ли неравенство $\|r_{k+1}\| \le \|r_k\|$ для невязок r_k, $k = 1, 2, \ldots$ генерируемых в процессе решения СЛАУ методом COCR? (1 балл)
8. Требуется ли в методе бисопряженных градиентов (BiCG) хранить все базисные векторы подпространства Крылова? (1 балл)
9. Укажите число матрично-векторных умножений, которые необходимо выполнить на каждой итерации метода COCG. (1 балл)
10. Встречается ли в методе обобщенных минимальных невязок GMRES операция умножения вектора на транспонированную матрицу A^T ? (1 балл)

4. Написать подпрограмму решения СЛАУ с верхнетреугольной матрицей для матрицы, хранящейся в разреженном блочно-строчном формате. (10 баллов)

5. Какие из ниже приведенных матриц можно интерпретировать как комплекснозначные? Какие из них являются комплексно-симметричными, эрмитовыми? Можно ли применить метод COCG для решения СЛАУ с данной матрицей?

а) $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & 5 \\ 1 & -6 & 4 & 2 \\ 6 & 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$, б) $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 4 & -2 & 5 \\ 5 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, в) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. (12 баллов)

Утверждаю: зав. кафедрой Прикладной математики _____ Соловейчик Ю.Г.
(подпись)
(дата)

2. Критерии оценки результатов обучения, соотнесенных с уровнями освоения индикаторов достижения компетенций

Ответ на экзаменационный билет засчитывается на **продвинутом** уровне, если студент проводит сравнительный комплексный анализ материала, выявляет проблемы, предлагает механизмы их решения, представляет количественные характеристики определенных процессов, приводит конкретные примеры, не допускает ошибок и способен обосновать выбор метода решения задачи. Совокупность результатов обучения по дисциплине и соотнесенных с ними индикаторов достижения компетенций не содержит пробелов. Установленные в программе компетенции сформированы в полном объеме. Оценка составляет *от 35 до 40 баллов.*

Ответ на экзаменационный билет засчитывается на **базовом** уровне, если студент при ответе на вопросы формулирует основные понятия, дает характеристику процессов, явлений, проводит анализ причин, условий, способен представить количественные и качественные характеристики процессов, не допускает существенных ошибок при решении задачи. Совокупность результатов обучения по дисциплине и соотнесенных с ними индикаторов достижения компетенций содержит несущественные пробелы. Установленные в программе компетенции сформированы на базовом уровне. Оценка составляет *от 34 до* 27 *баллов.*

Ответ на экзаменационный билет засчитывается на **пороговом** уровне, если студент

при ответе на вопросы дает определение основных понятий, может показать причинно-следственные связи явлений, при решении задачи допускает непринципиальные ошибки, например, вычислительные. Совокупность результатов обучения по дисциплине и соотнесенных с ними индикаторов достижения компетенций содержит пробелы. Установленные в программе компетенции сформированы на пороговом уровне. Оценка составляет *от* 26 *до* 20 *баллов.*

Ответ на экзаменационный билет считается **неудовлетворительным** (ниже порогового уровня), если студент при ответе на вопросы не дает определений основных понятий, не способен показать причинно-следственные связи явлений, при решении задачи допускает принципиальные ошибки. Совокупность результатов обучения по дисциплине и соотнесенных с ними индикаторов достижения компетенций содержит существенные пробелы. Установленные в программе компетенции не сформированы. Оценка составляет *менее* 20 *баллов.*

3. Шкала оценки

Экзамен считается сданным, если сумма баллов по всем заданиям билета составляет от 20 до 40 баллов включительно. Сумма менее 20 баллов признается неудовлетворительным результатом промежуточной аттестации по дисциплине.

В общей оценке по дисциплине экзаменационные баллы учитываются в соответствии с правилами балльно-рейтинговой системы, установленными в НГТУ.

4. **Вопросы к** экзамену **по дисциплине «**Прямые и итерационные методы решения больших разреженных систем уравнений**»**

1. Скалярное произведение и билинейная форма в комплексном линейном пространстве,
2. Симметричные и эрмитовы комплексные матрицы,
3. Самосопряженный оператор, действующий в комплексном пространстве,
4. Матричное представление комплексных чисел,
5. Подпространство Крылова *K(A, m)*,
6. Предобусловливание,
7. Разреженный блочно-строчный формат хранения матриц,
8. Разреженный блочно-столбцовый формат хранения матриц,
9. Разреженный блочно-строчно-столбцовый формат хранения матриц.
10. *Conjugate Orthogonal Conjugate Method (COCG).*
11. *Conjugate A-Orthogonal Conjugate Residual Method (COCR)*
12. *Локально оптимальная схема для комплексно-симметричных матриц*
13. *Метод обобщенных минимальных невязок (GMRES)*
14. Можно ли применить методы CG, CR, ЛОС, GMRES, BCG и BCGStab для решения СЛАУ с вещественной симметричной матрицей?
15. Можно ли применить методы CG, CR, ЛОС, GMRES, BCG и BCGStab для решения СЛАУ с вещественной несимметричной матрицей?
16. Можно ли применить методы CG, CR, ЛОС, GMRES, BCG и BCGStab для решения СЛАУ с комплексной симметричной матрицей?
17. Можно ли применить методы CG, CR, ЛОС, GMRES, BCG и BCGStab для решения СЛАУ с комплексной несимметричной матрицей?
18. Можно ли применить методы CG, CR, ЛОС, GMRES, BCG и BCGStab для решения СЛАУ с вещественной эрмитовой матрицей?
19. Можно ли применить методы CG, CR, ЛОС, GMRES, BCG и BCGStab для решения СЛАУ с вещественной неэрмитовой матрицей?

20. Можно ли применить методы CG, CR, ЛОС, GMRES, BCG и BCGStab для решения СЛАУ с комплексной эрмитовой матрицей?
21. Можно ли применить методы CG, CR, ЛОС, GMRES, BCG и BCGStab для решения СЛАУ с комплексной неэрмитовой матрицей?
22. Можно ли применить методы CG, CR, ЛОС, GMRES, BCG и BCGStab для решения СЛАУ с комплексно-симметричной, но неэрмитовой матрицей?
23. Выполняется ли неравенство $\|r_{k+1}\| \le \|r_k\|$ для невязок r_k, $k = 1, 2, \ldots$ генерируемых в процессе решения СЛАУ методами CG, CR, ЛОС, GMRES, BCG и BCGStab?
24. Требуется ли в методах CG, CR, ЛОС, GMRES, BCG и BCGStab хранить все базисные векторы подпространства Крылова?
25. Укажите число матрично-векторных умножений, которые необходимо выполнить на каждой итерации методов CG, CR, ЛОС, GMRES, BCG и BCGStab.
26. Имеет ли смысл делать сглаживание невязки в схеме методов CG, CR, ЛОС, GMRES, BCG и BCGStab?
27. Встречается ли в методах CG, CR, ЛОС, GMRES, BCG и BCGStab операция умножения вектора на транспонированную матрицу A^T ?
28. Написать подпрограмму матрично-векторного умножения для матрицы, хранящейся в разреженном блочно-строчном формате.
29. Написать подпрограмму матрично-векторного умножения для матрицы, хранящейся в разреженном блочно-столбцовом формате.
30. Написать подпрограмму матрично-векторного умножения для матрицы, хранящейся в разреженном блочно-строчно-столбцовом формате.
31. Написать подпрограмму решения СЛАУ с нижнетреугольной матрицей для матрицы, хранящейся в разреженном блочно-строчном формате.
32. Написать подпрограмму решения СЛАУ с нижнетреугольной матрицей для матрицы, хранящейся в разреженном блочно-столбцовом формате.
33. Написать подпрограмму решения СЛАУ с нижнетреугольной матрицей для матрицы, хранящейся в разреженном блочно-строчно-столбцовом формате.
34. Написать подпрограмму решения СЛАУ с верхнетреугольной матрицей для матрицы, хранящейся в разреженном блочно-строчном формате.
35. Написать подпрограмму решения СЛАУ с верхнетреугольной матрицей для матрицы, хранящейся в разреженном блочно-столбцовом формате.
36. Написать подпрограмму решения СЛАУ с верхнетреугольной матрицей для матрицы, хранящейся в разреженном блочно-строчно-столбцовом формате.
37. Пусть критерием останова итерационного метода служит условие уменьшения компонент вектора невязки, перечисленных в массиве a, размера m<n (n – размер вектора неизвестных) в заданное число раз. Написать код подпрограммы, реализующий выполнение данного критерия останова решателя.
38. .Какие из ниже приведенных матриц можно интерпретировать как комплекснозначные? Какие из них являются комплексно-симметричными, эрмитовыми? Можно ли применить метод X для решения СЛАУ с данной матрицей? В задании будет дано 3 матрицы. Оценивается максимум в 12 баллов. Примеры матриц приведены ниже.

а) $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & 5 \\ 1 & -6 & 4 & 2 \\ 6 & 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$, б) $\begin{pmatrix} 4 & -2 & 7 & -1 \\ 2 & 4 & 1 & 7 \\ 3 & 2 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$, в) $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 4 & -2 & 5 \\ 5 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

г) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, д) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, е) $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & -8 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 8 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -8 & 5 & 9 & 3 & 0 \\ 8 & 0 & -9 & 5 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 3 & 0 & 6 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 3 & 1 & 6 \end{pmatrix}$,

ж) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, з) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, и) $\begin{pmatrix} 0 & -10 \\ 10 & 0 \end{pmatrix}$, к) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

л) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, м) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, н) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & 5 \\ 5 & -1 & 4 & 2 \\ 1 & 5 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, о) $\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$.